APPLICATION DE L'ALGEBRE DE BOOLE AUX CIRCUITS ELECTRIQUES

Conventions

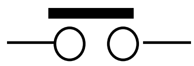
Dans les schémas électriques les **contacts sont toujours représentés au repos**.

Un contact fermé vaut 1, ouvert il vaut 0

Un contact ouvert au repos est appelé **contact travail** car il faut exercer un travail pour qu'il se ferme et prenne la valeur 1.

Un contact fermé au repos est appelé **contact repos** car il prend la valeur 1 sans qu'il soit nécessaire d'exercer un travail.

Lorsque deux contacts l'un travail, l'autre repos, sont mus par la même commande, si le premier se nomme X, le second se nommera X barre et s'écrira: $\overline{X}$

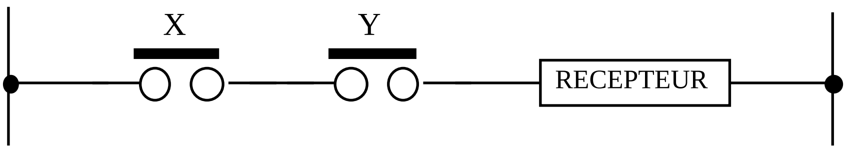
CONTACT	AU REPOS	AU TRAVAIL	GRAPHE
X	0	1	
$\overline{X}$	1	0	

Représentations d'un schéma électrique

Contacts en série

Représentation verbale: Le récepteur doit être actif lorsque les contacts X et Y sont fermés.

Représentation de l'électricien:



Représentation du logicien:
Par la table de vérité du circuit

X	Y	R
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Cette table fait apparaître en face des 4 combinaisons possibles de nos deux variables (X et Y) l'état du récepteur 0 = inactif, 1 = actif.

Nous pouvons représenter cette table de vérité sous une autre forme, à l'aide d'un tableau à double entrée

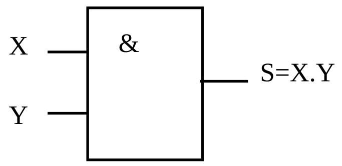
Y → / X ↓	0	1
0	**0**	**0**
1	**0**	**1**

Le logicien définit cette fonction (contacts en série) comme le **produit logique** ou **ET LOGIQUE**
Elle peut s'écrire également à l'aide de l'équation booléenne ci-dessous:

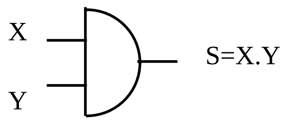
$$R = X . Y$$

Ce qui s'énonce R égale X et Y
Nous pourrons représenter cette fonction à l'aide du symbole logique ci-dessous que nous nommerons **OPERATEUR LOGIQUE** ou **PORTE LOGIQUE**

SYMBOLE NORMALISE



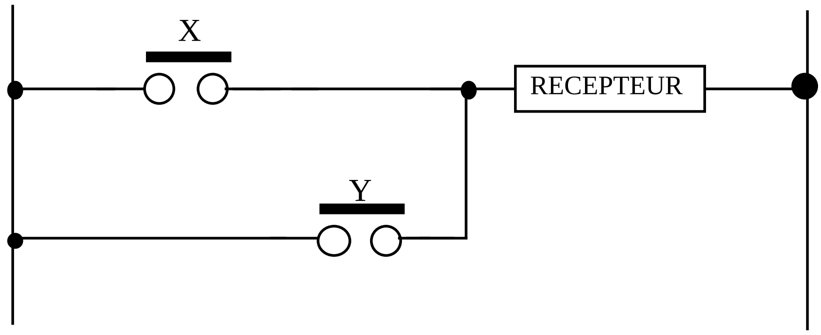
SYMBOLE USUEL



Contacts en parallèle

Représentation verbale: Le récepteur doit être actif lorsque le contact X ou le contact Y est fermé

Représentation de l'électricien:



Représentation du logicien:

Table de vérité

X	Y	R
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Autre forme:

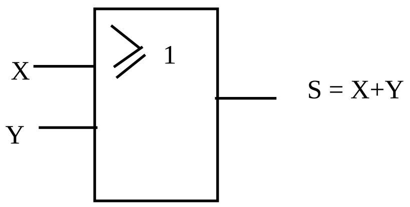
Y → / X ↓	0	1
0	**0**	**1**
1	**1**	**1**

Le logicien définit cette fonction (contacts en parallèle) comme la **somme logique** ou bien comme **OU LOGIQUE**
Elle peut s'écrire également à l'aide de l'équation booléenne ci-dessous:

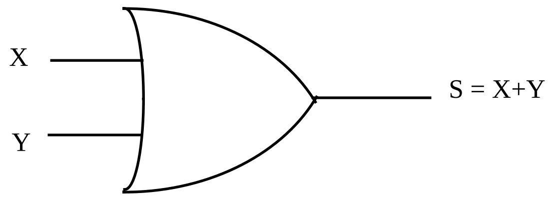
$$R = X + Y$$

Ce qui s'énonce R égale X ou Y
Nous pourrons représenter cette fonction à l'aide du symbole logique ci-dessous

SYMBOLE NORMALISE



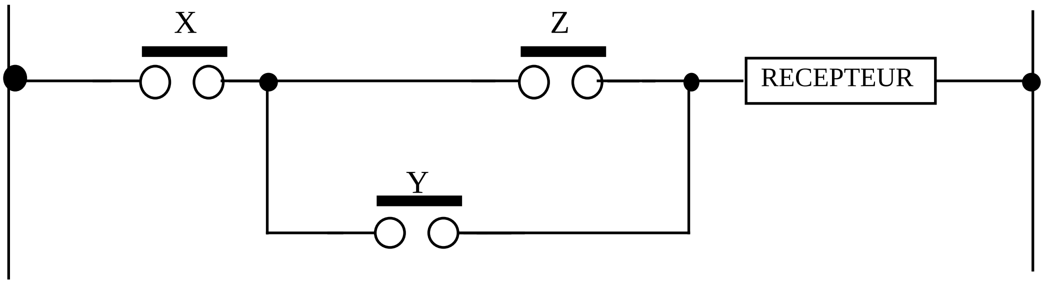
SYMBOLE USUEL



Association de contacts en série et en parallèle

Premier exemple

Soit le schéma suivant:



Pour que le récepteur soit à l'état actif, il faut que les contacts X et Z ou X et Y soient à 1 simultanément ce qui se traduit par l'équation logique:

$$R = (X.Y) + (X.Z)$$

On aurait pu dire également, pour que le récepteur soit actif, X doit être à 1 et Y ou Z. L'équation aurait été alors :

$$R = X . (Y + Z)$$

Il découle de l'égalité entre ces deux équations la propriété de distributivité suivante:

$$\boxed{\mathbf{R = X . (Y + Z) = (X.Y) + (X.Z)}}$$

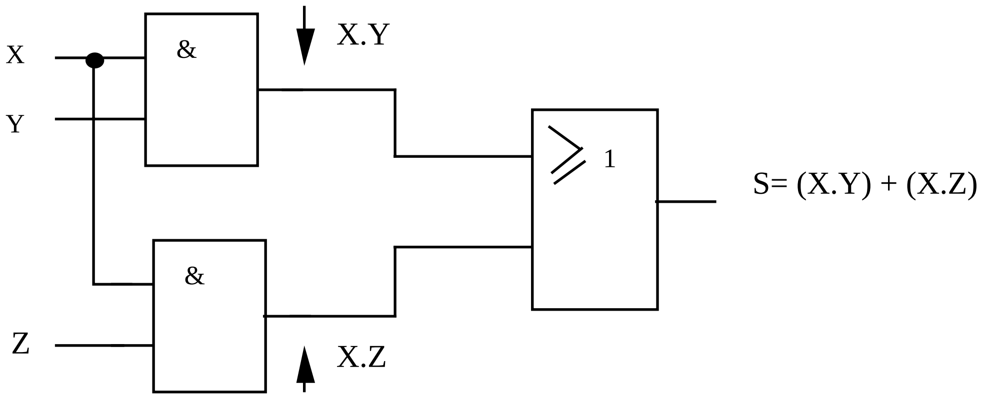
Et la table de vérité

X	Y	Z	R
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

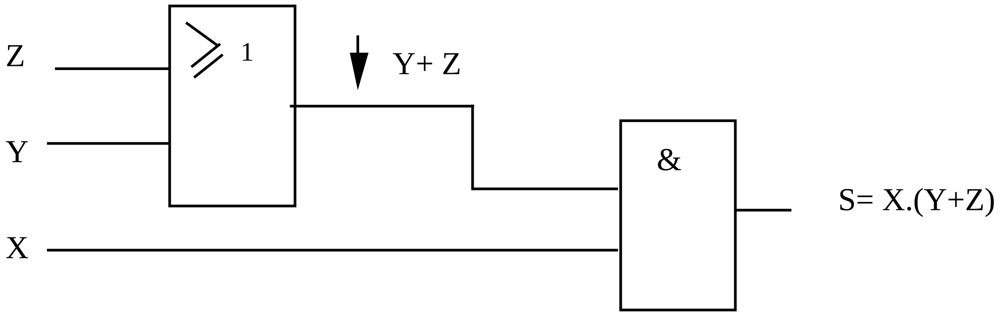
Qui pourra se présenter sous une autre forme qui se nomme **tableau de Karnaugh**

XY → Z ↓	00	01	11	10
0	**0**	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**1**

Dans ce tableau chaque colonne représente une combinaison des deux variables X et Y. Par exemple la première colonne représente toutes les combinaisons dans lesquelles X et Y sont simultanément à 0, dans la case supérieure Z vaut 0 et le récepteur n'est pas activé (0) dans la case inférieure Z vaut 1 et le récepteur n'est pas activé (0) ce sont les deux combinaisons 000 et 001 de la table vérité.
Il est à noter que les colonnes sont rangées dans l'ordre du code binaire réfléchi. Ceci est indispensable pour pouvoir exploiter ce tableau de Karnaugh.
Nous représenterons ce schéma à l'aide du logigramme ci - dessous



qui pourra être également représenté de la façon suivante:

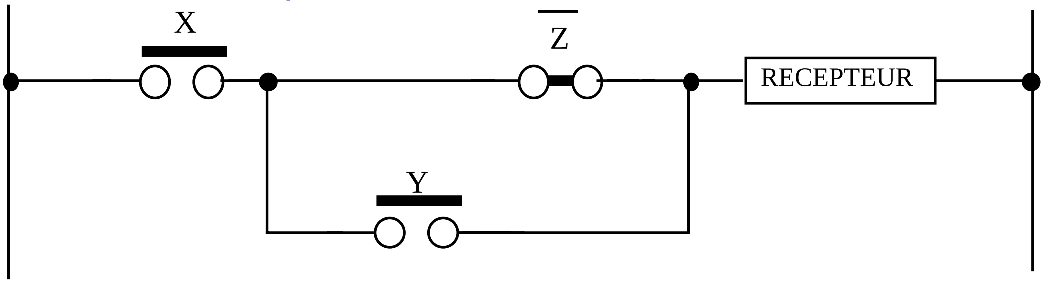


conformément à la seconde équation.

Nous tirons de cet exemple la conclusion suivante:

Un schéma électrique peut être représenté par des équations apparemment différentes et des logigrammes différents, l'important est qu'ils se réfèrent à une table de vérité unique.

Second exemple:



Le contact Z est ici fermé au repos, nous devons donc le nommer Z barre et l'écrire: $\overline{Z}$ dans nos équations. Pour que le récepteur soit actif il faut que X et Y ou X et $\overline{Z}$ soient fermés d'où les équations suivantes:

$$R = (X \,.\, Y) + (X \,.\, \overline{Z})$$

ou bien

$$R = X \,.\, (Y + \overline{Z})$$

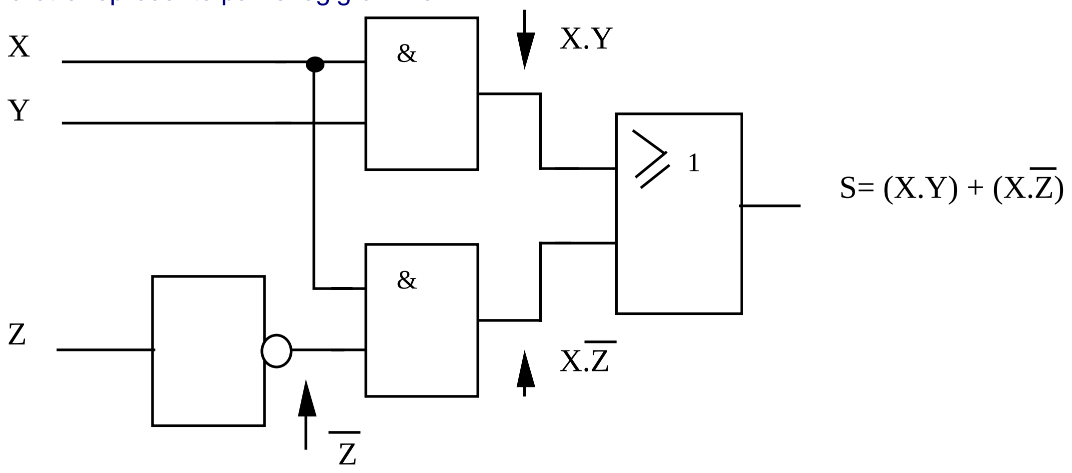
Et la table de vérité

X	Y	Z	R
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

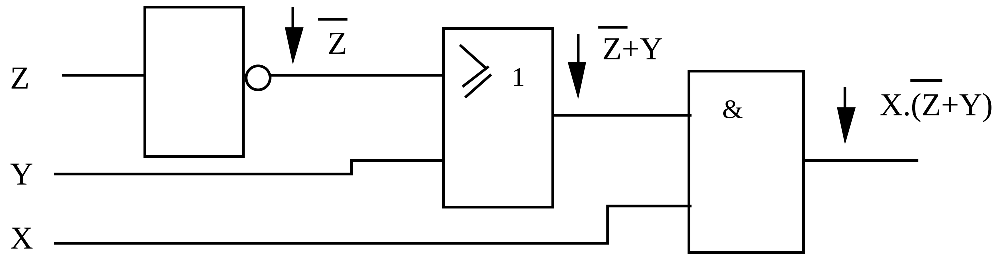
Et le tableau de Karnaugh:

XY→ Z↓	00	01	11	10
0	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**0**

Il pourra être représenté par le logigramme:



Nous pourrons également le représenter à l'aide de cet autre logigramme:



Les lois de l'Algèbre de Boole

Le théorème de De Morgan

Le théorème de De Morgan est très simple mais fondamental. Il est indispensable de savoir le manier de façon aisée.

Théorème de De Morgan:

a/ Le **complément d'une somme** logique est égal au **produit** logique **du complément des variables**

Ainsi: $\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$

b/ Le **complément d'un produit** logique est égal à la **somme** logique du **complément des variables**

Ainsi: $\overline{X . Y} = \overline{X} + \overline{Y}$

Les lois usuelles

La double complémentation

La double complémentation d'une variable ou d'une expression booléenne est égale à la variable ou à l'expression elle même.

Exemples:

$$\overline{\overline{X}} = X$$

et

$$\overline{\overline{X + Y}} = X + Y$$

IV - 3 - 2 - 2 - La distributivité

La somme logique distribue le produit logique:

Exemple:

$$X . (Z + T) = (X . Z) + (X . T)$$

Mais aussi, et ceci diffère de l'algèbre classique, le produit logique distribue la somme logique:

Exemple:

$$X + (Z . T) = (X + Z) . (X + T)$$

La démonstration se fera dans le cadre des exercices

IV - 3 - 2 - 3 - Des égalités à connaître

$$X . (X + Y) = X$$

$$X . (\overline{X} + Y) = X . Y$$

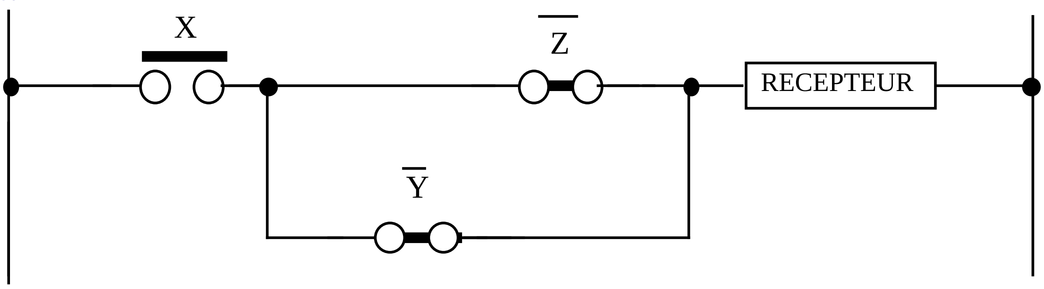
Ces égalités que nous venons d'énoncer ainsi que celles figurant dans le tableau suivant seront étudiées dans le prochain chapitre, nous les faisons apparaître dans celui-ci afin de rendre l'ouvrage plus facilement utilisable.

ET	OU	NAND	NOR	DILEME
$X . X = X$	$X + X = X$	$\overline{X . X} = \overline{X}$	$\overline{X + X} = \overline{X}$	$X \oplus X = 0$
$X . \overline{X} = 0$	$X + \overline{X} = 1$	$\overline{X . \overline{X}} = 1$	$\overline{X + \overline{X}} = 0$	$X \oplus \overline{X} = 1$
$X . 0 = 0$	$X + 0 = X$	$\overline{X . 0} = 1$	$\overline{X + 0} = \overline{X}$	$X \oplus 0 = X$
$X . 1 = X$	$X + 1 = 1$	$\overline{X . 1} = \overline{X}$	$\overline{X + 1} = 0$	$X \oplus 1 = \overline{X}$

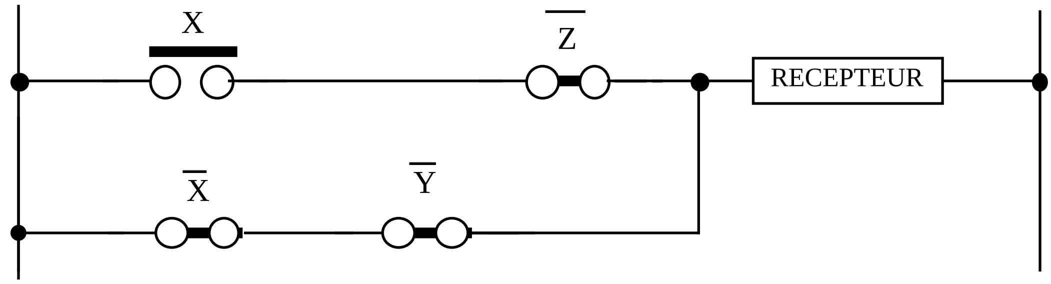
Exercices

Mettre en équation les schémas ci dessous (*)

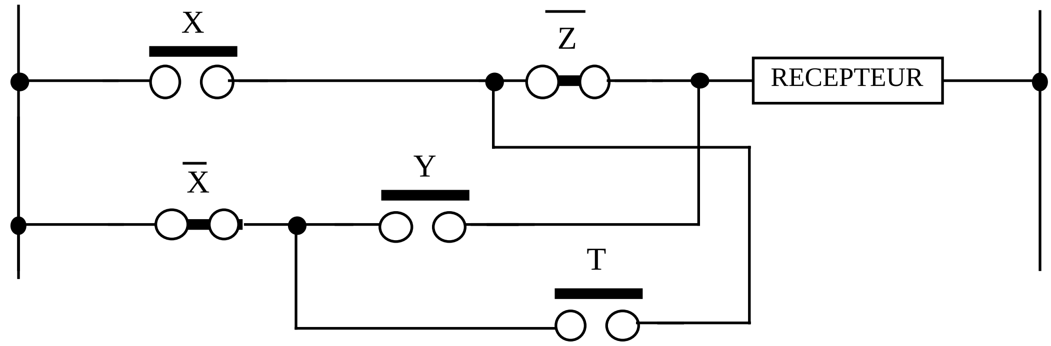
a/



b/

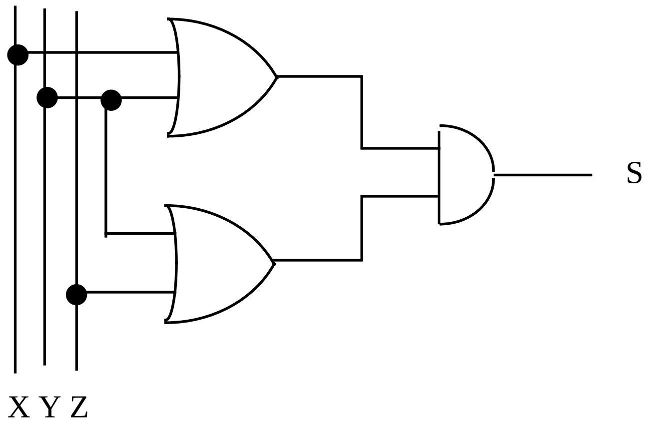


c/

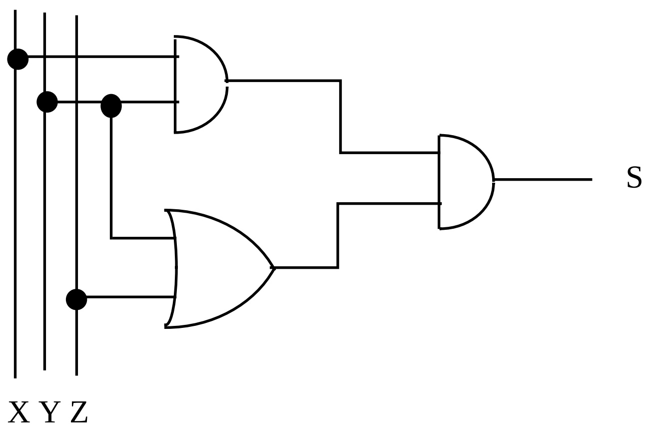


IV - 3 - 3 - 2 - Mettre en équation les logigrammes ci après (*)

a/



b/



IV - 3 - 3 - 3 - Mettre en équation les tables de vérité ci dessous (*)

a/

X	Y	Z	R
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

b/

X	Y	Z	R
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Mettre sous forme de tableau de Karnaugh les tables de vérité de l'exercice précédent (*)

Application du théorème de De Morgan

Supprimer les barres des équations ci dessous jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus au dessus des opérateurs logiques

$$A = \overline{X.Y.Z}$$

$$B = \overline{\overline{X.Y.Z} + \overline{T.Z}}$$

$$C = \overline{\overline{\overline{X}.Y}.Z}$$