LES OPERATEURS LOGIQUES
Leçon 06

L'aspect matériel des opérateurs logiques

Les opérateurs logiques ou portes logiques que nous envisageons d'étudier dans le cadre de notre travail d'électronicien seront en général des opérateurs électroniques se présentant sous la forme de circuits intégrés. La technologie de réalisation et d'utilisation font l'objet d'un autre ouvrage.

Les circuits (ou boîtiers) qui vont contenir ces opérateurs sont généralement pourvus de 14 connexions (on dira souvent 14 pattes ou 14 broches) et ne contiennent qu'un seul type d'opérateur, par exemple que des ET à 2 entrées. Ces circuits nécessitent une alimentation électrique qui utilisera deux connexions les 12 restantes seront affectées aux opérateurs logiques ainsi notre circuit contenant des ET à 2 entrées, chaque opérateur ayant besoin de 3 broches (2 entrées et une sortie) nous trouverons donc dans ce circuit 12 / 3 = 4 opérateurs.

Les opérateurs logiques à l'exclusion des inverseurs et des dilemmes (ou exclusif) sont susceptibles d'exister à N entrées. Il existe cependant deux exceptions à la règle, les inverseurs qui, par nature, ne possèdent qu'une entrée et le dilemme (ou exclusif) qui n'en possède que deux. Il est possible que nous ayons besoin de réaliser tel opérateur, ET à 9 entrées par exemple, pour cela nous serons certainement contraints d'associer plusieurs opérateurs , il nous faut donc nous interroger sur les propriétés d'associativité des opérateurs logiques.

Nous devrons également nous interroger sur les cas particulier par exemple sur un ET à deux entrées si nous connectons sur l'une des entrées la variable X et sur l'autre cette même variable ou le complément de cette variable, qu'obtiendrons nous?

Les opérateurs logiques usuels sont les suivants:
- ET (AND)
- OU (OR) également appelé OU inclusif
- Inverseur
- NAND (contraction de Not And), le ET complémenté
- NOR (contraction de Not Or), le OU complémenté appelé aussi NI
- OU Exclusif (XOR) ou Dilemme

Nous allons établir les caractéristiques essentielles des opérateurs logiques pour cela nous effectuerons les opérations nécessaires pour établir celles de la porte ET puis nous énumèrerons celles des autres portes. Le lecteur pourra exécuter les mêmes opérations à titre d'exercice pour les autres opérateurs.

Étude d'un opérateur logique, l'opérateur:ET

Expression algébrique

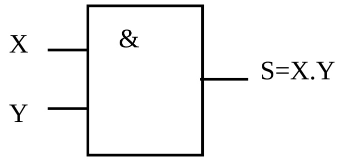
$R = X . Y$

L'opérateur ET est représenté par un point ou même fréquemment par l'absence de symbole

$R = XY$

Symbole graphique

SYMBOLE NORMALISE



SYMBOLE USUEL

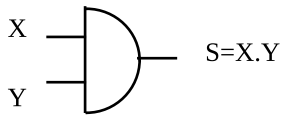


Table de vérité

Présentation classique:

X	Y	R
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Présentation sous forme de tableau de Karnaugh

Y → X ↓	0	1
0	**0**	**0**
1	**0**	**1**

Propriété de commutativité

On dira que l'opérateur ET est commutatif si l'égalité X.Y = Y.X est vraie. Si l'on se ramène au schéma électrique équivalent, ceci est évident, lorsque deux contacts sont montés en série peu importe lequel est placé en premier. Ceci signifie également que le repérage des broches d’entrée de l'opérateur ne privilégie aucune d'elles.

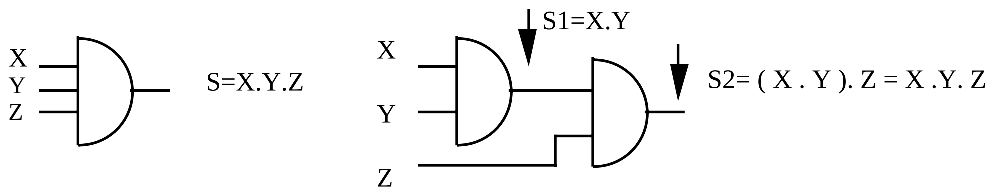
Tous les opérateur logiques énumérés au paragraphe V - 1 sont commutatifs.

Propriété d'associativité

Lorsqu'un opérateur logique est associatif il nous permet d'écrire:

$$S = X.Y.Z = (X.Y).Z = X.\,(Y.Z)$$

Sur le plan du logigramme cela permet de réaliser un opérateur ET à trois entrées à l'aide d'opérateurs ET à deux entrées



Pour vérifier cette propriété, on pourra procéder à la réalisation de la table de vérité des deux logigrammes si la colonne S est identique à S2 on pourra dire que la propriété d'associativité est vérifiée.

X	Y	Z	S=X.Y.Z	S1=X.Y	S2=S1.Z
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

On effectue toujours le même raisonnement, un ET logique entre trois variables revient à disposer trois contacts en série, pour que le récepteur soit actif, il faut que les trois contacts soient fermés. Dans le tableau ci-dessus, seule la dernière combinaison satisfait cette condition, elle donne alors 1 en S. Les deux dernières donnent 1 en S1 il faut ensuite faire un ET entre S1 et Z ceci impose S1 et Z égaux à 1 pour donner 1 en S2.

Les deux colonnes S et S2 sont identiques, la propriété d'associativité de l'opérateur ET est alors vérifiée

Cas particuliers

Quatre cas particuliers sont à connaître:
- X ET X
- X ET $\overline{X}$
- X ET 1
- X ET 0

pour étudier ces cas particuliers, nous pourrons écrire les différentes combinaisons en fonction de X qui vont se présenter à l'opérateur, en déduire ce que l'on recueillera à sa sortie et le comparer avec X.

X ET X

X	X	S
0	0	0
1	1	1

X ET $\overline{X}$

X	$\overline{X}$	S
0	1	0
1	0	0

X ET 1

X	1	S
0	1	0
1	1	1

X ET 0

X	0	S
0	0	0
1	0	0

A l'examen des tableaux ci dessus nous pouvons constater que:

1er Tableau	S = X
2ème Tableau	S = 0
3ème Tableau	S = X
4ème Tableau	S = 0

Nous en déduirons les cas particuliers ci dessous:

X	ET	X	=	**X**
X	ET	$\overline{X}$	=	**0**
X	ET	1	=	**X**
X	ET	0	=	**0**

Les opérations qui viennent d'être effectuées pour l'opérateur ET devront l'être également pour les autres, nous n'en ferons pas ici le détail, certaines de ces opérations seront demandées au lecteur dans le cadre des exercices.

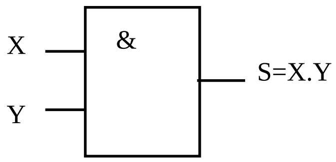
L'opérateur: ET

Expression algébrique

R = X . Y   ou bien R = XY

Symboles graphiques

SYMBOLE NORMALISE



SYMBOLE USUEL

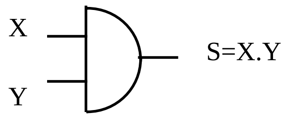


Table de vérité

X	Y	R
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Propriété de commutativité

Tous les opérateurs logiques sont commutatifs.

Propriété d'associativité

L'opérateur logique ET est associatif il nous permet d'écrire:

S = X.Y.Z = (X.Y).Z = X. (Y.Z)

Cas particuliers

X	ET	X	=	**X**
X	ET	$\overline{X}$	=	**0**
X	ET	1	=	**X**
X	ET	0	=	**0**

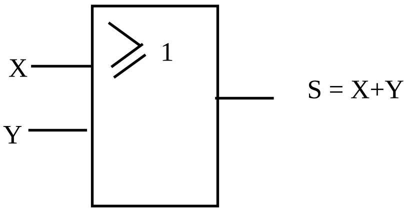
L'opérateur: OU

Expression algébrique

R = X + Y

Symboles graphiques

SYMBOLE NORMALISE



SYMBOLE USUEL

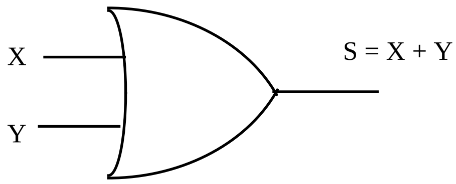


Table de vérité

X	Y	R
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Propriété de commutativité

Tous les opérateurs logiques sont commutatifs.

Propriété d'associativité

L'opérateur logique OU est associatif il nous permet d'écrire:

S = X+Y+Z = (X+Y)+Z = X +(Y+Z)

Cas particuliers

X	OU	X	=	**X**
X	OU	$\overline{X}$	=	**1**
X	OU	1	=	**1**
X	OU	0	=	**X**

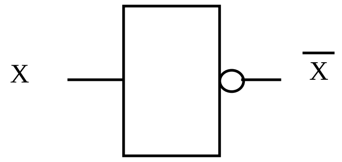
L'opérateur INVERSEUR

Expression algébrique

$X \rightarrow \overline{X}$

Symboles graphiques

SYMBOLE NORMALISE



SYMBOLE USUEL

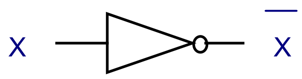


Table de vérité

X	**R**
0	1
1	0

Propriété de commutativité

Cet opérateur ne possède qu'une entrée

Propriété d'associativité

Sans objet

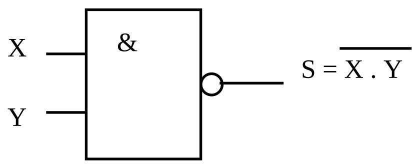
L'opérateur: NAND

Expression algébrique

$R = \overline{X . Y}$ ou bien X / Y qui se dit X nand Y

Symboles graphiques

SYMBOLE NORMALISE



SYMBOLE USUEL

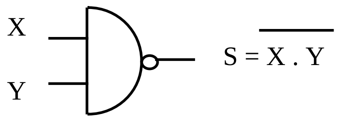


Table de vérité

X	Y	R
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Propriété de commutativité

Tous les opérateurs logiques sont commutatifs.

Propriété d'associativité

L'**opérateur logique NAND n'est pas associatif**

Cas particuliers

X	NAND	X	=	$\overline{X}$
X	NAND	$\overline{X}$	=	**1**
X	NAND	1	=	$\overline{X}$
X	NAND	0	=	**1**

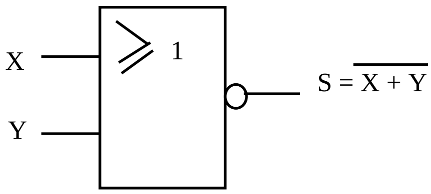
L'opérateur: NOR appelé également NI

Expression algébrique

R = $\overline{X + Y}$ ou bien X $\downarrow$ Y qui se dit X nor Y

Symboles graphiques

SYMBOLE NORMALISE



SYMBOLE USUEL

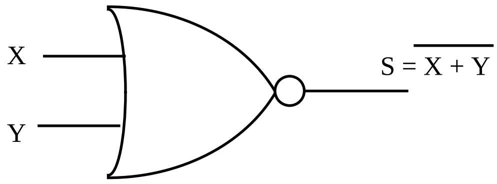


Table de vérité

X	Y	R
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Propriété de commutativité

Tous les opérateur logiques sont commutatifs.

Propriété d'associativité

L'**opérateur logique NOR n'est pas associatif**

Cas particuliers

X	NOR	X	=	$\overline{X}$
X	NOR	$\overline{X}$	=	**0**
X	NOR	1	=	**0**
X	NOR	0	=	$\overline{X}$

L'opérateur: OU EXCLUSIF

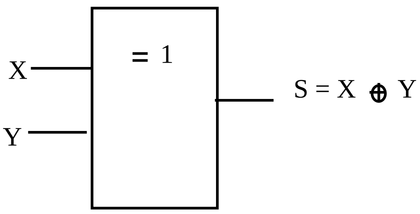
appelé également DILEMME

Expression algébrique

$R = X \oplus Y$ ou bien $\overline{X}.Y + X.\overline{Y}$

Symboles graphiques

SYMBOLE NORMALISE



SYMBOLE USUEL

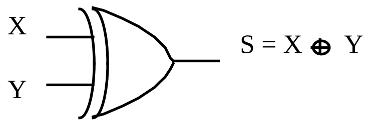


Table de vérité

X	Y	R
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Propriété de commutativité

Tous les opérateurs logiques sont commutatifs.

Propriété d'associativité

L'opérateur logique Dilemme est associatif

Cas particuliers

$$X \oplus X = \mathbf{0}$$

$$X \oplus \overline{X} = \mathbf{1}$$

$$X \oplus 1 = \overline{\mathbf{X}}$$

$$X \oplus 0 = \mathbf{X}$$

Exercices

Choix des opérateurs logiques

En fonction des besoins ci dessous quel opérateur choisir

a - Effectuer la somme modulo 2 entre deux variables

b - Activer un récepteur lorsqu'une des variables est à 0

c - Activer un récepteur lorsque toutes les variables sont à 1

d- Activer un récepteur lorsque les deux variables sont différentes (une à 1 l'autre à 0)

e - Réaliser un inverseur escamotable à l'aide d'une variable de commande lorsque cette variable est à 1 l'autre variable sera inversée, lorsqu'elle est 0 l'autre n'est pas inversée.

f - Activer un récepteur lorsqu'une variable au moins est à 1

Démonstrations algébriques

Démontrez algébriquement les égalités ci-dessous:

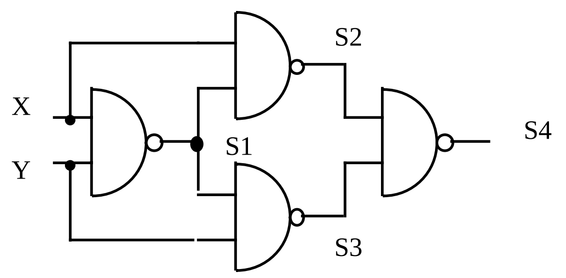
a - $X(\overline{X} + Y) = XY$

b - $X + XY = X$

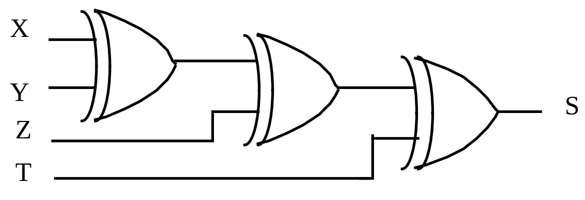
c - $X + (\overline{X} . Y) = X + Y$

Étude de logigrammes.

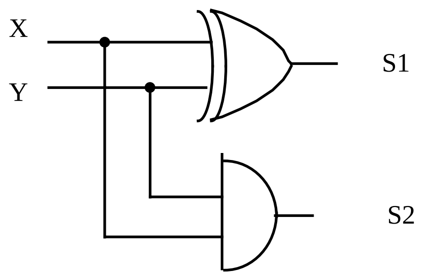
a - Écrire les équations des sorties S1,2,3,4 sous la forme de somme de produits de variables. Quel montage a-t-il été réalisé?



b - Quelle est la condition sur les variables d'entrée pour que S soit égale à 1



c - Si X et Y sont deux variables indépendantes quelle est la fonction assurée par ce logigramme?



Étude du dilemme à trois entrées

Si l'équation du dilemme à deux entrées est la suivante:

$\overline{X}.Y + X.\overline{Y}$ présentée sous la forme d'une somme de produits

a/ - quelle est, présentée de la même façon, l'équation du complément de dilemme?

b/ - en s'aidant de l'associativité du dilemme et des résultats précédents l'équation d'un dilemme à trois entrées