## COMPLÉMENTS SUR LES TABLEAUX DE KARNAUGH
### Leçon 08
**Cette leçon peut être ignorée dans un premier temps**

Dans ce chapitre nous allons regrouper un certain nombre de points qui ne sont pas, dans l'immédiat indispensable. Le lecteur à l'aise jusqu'à présent pourra y trouver un complément utile, celui qui découvre la logique avec difficulté, pourra dans un premier temps, se contenter de l'étude du paragraphe VII-1 et remettre le reste à plus tard.

### Les aléas de fonctionnement

Nous n'avons pas jusqu'à présent parlé de technologie cependant, bien que ce ne soit pas l'objet de cet ouvrage, il est nécessaire d'introduire ici la notion de temps de propagation.

Le temps de propagation d'un opérateur logique est le temps que va mettre l'opérateur pour établir sa sortie à 1 ou à 0 sous l'effet de la modification de ses entrées. C'est en quelque sorte son temps de réaction. Ce temps de réaction peut aller de quelques millisecondes pour un relais électromagnétique, à quelques nanosecondes pour un opérateur intégré classique et quelques centaines de picosecondes pour un opérateur intégré ultra rapide, mais il n'est jamais nul.

Lorsqu'une information circule par différents opérateurs certains chemins, comportant moins d'opérateurs, peuvent être plus rapides que d'autres, il peut en découler des phénomènes parasites gênants.

Exemple:

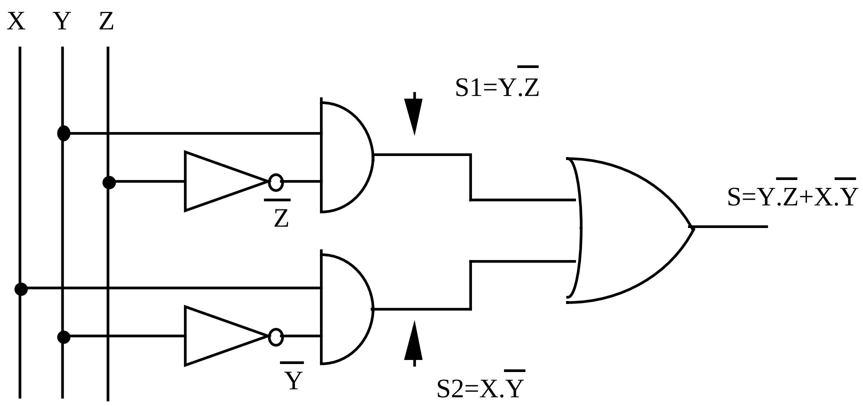
Soit la fonction représentée par le tableau ci-dessous

| X Y → <br> Z ↓ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Nous en tirons l'équation :

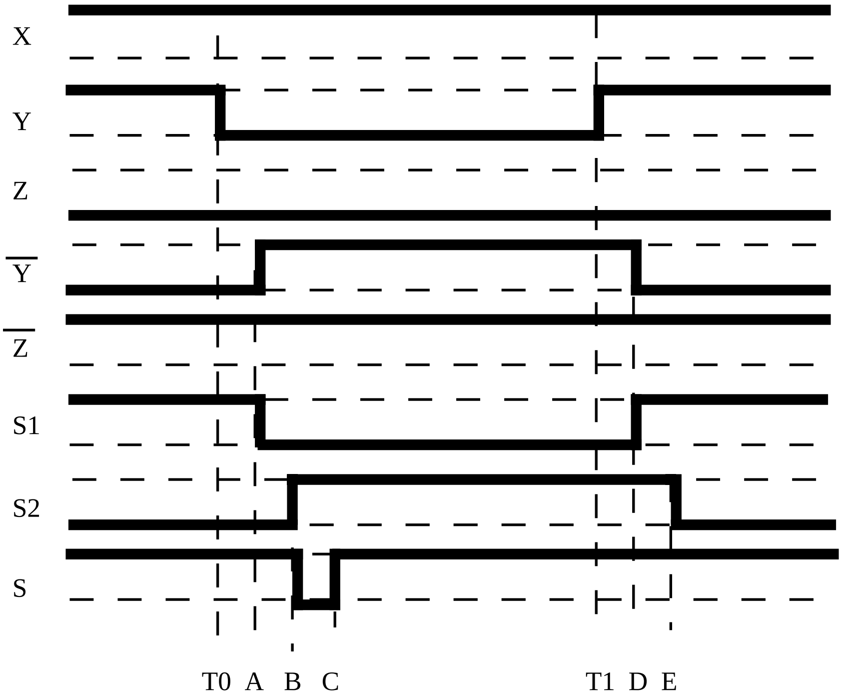
$$S = Y.\overline{Z} + X.\overline{Y}$$

Et le logigramme:



Supposons le système (X Y Z ) dans l'état 110 , la variable Y passe à l'état 0 puis revient à l'état 1 ce qui ne devrait pas avoir d'effet sur la sortie S ($S = Y.\overline{Z} + X.\overline{Y}$ ) puisque lorsque les variables d'entrée sont à 110 le terme $Y.\overline{Z} = 1$ et lorsqu'elles sont à 100 c'est le terme $X.\overline{Y}$ qui donne 1. Étudions les transitions des opérateurs logiques en tenant compte du temps de réaction des opérateurs

En face de chaque signal, la ligne inférieure représente le 0 et la ligne supérieur le 1 logique.




Étude du chronogramme

L'évolution des variables et des sorties d'opérateur sont représentées par les traits forts, les traits interrompus indiquent les états 0 (trait inférieur) et 1 (trait supérieur).

Au temps T0, la variable Y qui était à 1 passe à 0 (passage de 110 à 100)

en A la sortie de l'inverseur qui fournit $\overline{Y}$ passe à 1 et la sortie du ET qui fournit S1 ( l'équation est $Y . \overline{Z}$ ) passe à 0 . La transition de ces sorties s'effectue avec un temps de propagation de retard.

Le passage de $\overline{Y}$ à 1 va entraîner la montée de S2 à 1 et la descente de S1 va provoquer la descente de S à 0 avec 2 temps de propagation en B

La montée de S2 entraîne la remontée de S en C avec 3 temps de propagation de retard.
Nous pouvons constater une impulsion parasite en S d'une durée de 1 temps de propagation.
C la sortie de S remonte à 1 sous l'effet de la montée de S2 mais avec 3 temps de propagation de retard

Nous voyons que le phénomène qui a produit une impulsion parasite (un spike pour les américains) de durée égale à un temps de propagation. La transition de Y de 0 vers 1 au contraire crée un recouvrement au moment T1 ce qui ne génère pas d'impulsion.

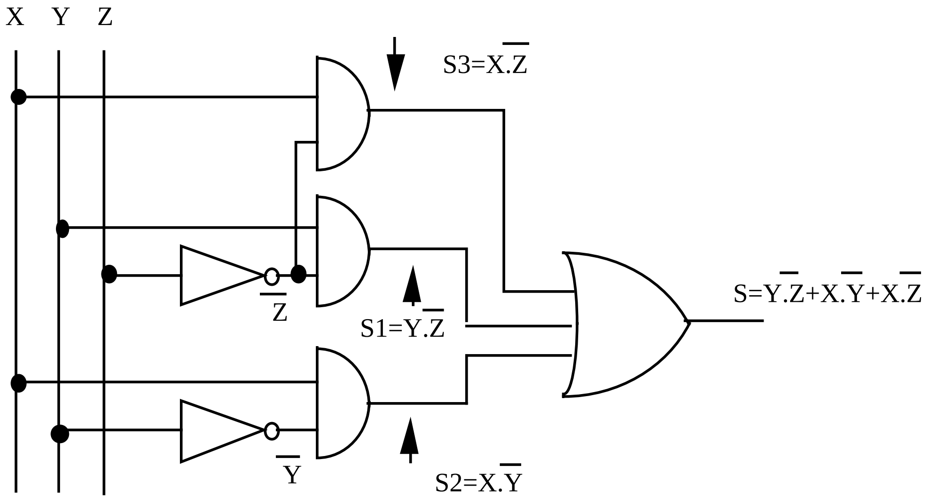
Nous pouvons également nous interroger sur les conditions d'essai des montages puisque dans un sens, Y passant de 1 à 0, un parasite apparaît et dans l'autre, Y passant de 0 à 1, il n'y a pas génération de parasite. Si nous avons une multitude d'opérateurs il sera très difficile de tester toutes les transitions possibles dans les deux sens. Des procédures d' auto-maintien permettent d'éviter ce type de parasite que l'on devra s'efforcer d' évité notamment dans les automatismes à relais.

Pour éviter ces parasites il faut assurer un chevauchement des regroupements dans le tableau de Karnaugh, ainsi dans notre cas nous devrions ajouter le terme $X. \overline{Z}$ ( les 2 cases colorées du tableau). Ce terme est redondant , c'est à dire qu'il contient des cases qui sont déjà incluses dans les autres termes, il n'est là que pour éviter les parasites. Il appartient au concepteur de juger de la nécessité de ces chevauchements, tout dépend de l'inertie du récepteur.

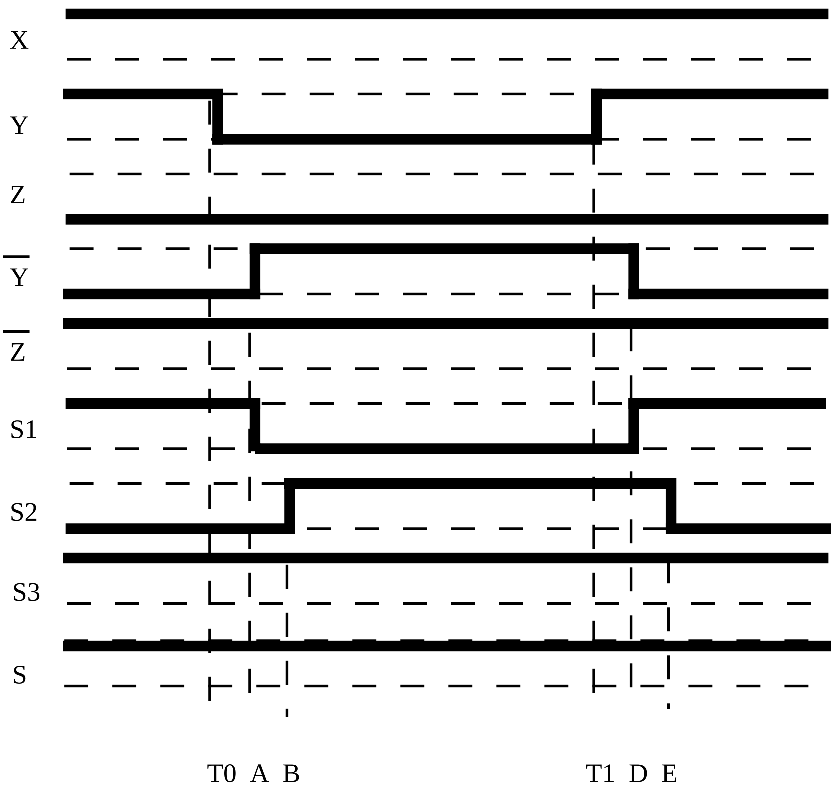
L'équation dans ce cas devient:

$S = Y.\overline{Z} + X.\overline{Y} + X.\overline{Z}$

Le logigramme est évidemment un peu plus compliqué




Mais le chronogramme ci dessous montre que la porte OU recevant 3 termes voit sont maintien au 1 logique grâce à l'opérateur ajouté qui reste stable pendant les transitions des autres.




**En conclusion:**

**Pour éviter la génération d'impulsions parasites il est nécessaire de prévoir des chevauchements entre les regroupements effectués dans le tableau de Karnaugh.**

**Le OU Exclusif et son tableau de Karnaugh**

Le OU Exclusif à pour équation $S = A . \overline{B} + \overline{A} . B$

Son complément s'écrit $\overline{S} = A . B + \overline{A} . \overline{B}$

Si nous faisons un OU Exclusif entre trois variables, cet opérateur étant associatif nous pourons injecter la sortie du premier opérateur dans une entrée du deuxième, cet opérateur recevant en outre la troisième variable.

L'équation du troisième qui reçoit la sortie S du premier et la variable C est:

$$T = S . \overline{C} + \overline{S} . C$$

Si l'on remplace S et $\overline{S}$ par leur valeur nous aurons:

$$T = ( A . \overline{B} + \overline{A} . B ). \overline{C} + (A . B + \overline{A} . \overline{B} ) . C$$

Ce qui nous donne:

$$T= A . \overline{B} . \overline{C} + \overline{A} . B . \overline{C} + A . B. C + \overline{A} . \overline{B} . C$$

Introduisons cette équation dans un tableau de Karnaugh

| AB → <br> C ↓ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Le tableau de Karnaugh du OU exclusif se présente comme un damier ( alternance parfaite de 0 et de 1 comme les cases noires et blanches d'un damier) aucune simplification n'est possible.

Le complément de ce OU exclusif serait également un damier dans lequel les 1 se substitueraient aux 0 et vice-versa

**On voit que pour faire le tableau de Karnaugh d'un dilemme il suffit de connaître une case, les autres s'en déduisent automatiquement. Pour connaître une des cases il suffit de se souvenir que le OU exclusif effectue la somme modulo 2 Ainsi le bit à placer dans la case codée 000 est :**

$$\mathbf{0 \oplus 0 \oplus 0 = 0}$$

Ainsi on peut voir qu'un tableau de OU exclusif, quel qu'en soit le nombre des variables, reçoit un 0 dans la case où toutes les variables sont à 0

Exemple N°1

Donner l'équation du tableau ci dessous:

| AB → <br> CD ↓ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 01 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Ce tableau est un damier c'est donc un dilemme, dans la case codée 0000 il y a un 1 c'est donc un complément de dilemme. L'équation est donc:

$$S = \overline{A \oplus B \oplus C \oplus D}$$

Exemple N°2

| XYZ → <br> TU ↓ | 000 | 001 | 1 <br> 011 | 010 | 2 <br> 110 | 111 | 3 <br> 101 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 01 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Ce tableau est un damier mais par paquets de deux cases ce n'est pas réellement un dilemme entre les 5 variables, des simplifications sont possibles. En effet si regroupons les 1 par paquet de 2, nous allons éliminer la variable U à chaque fois et dans l'équation finale cette variable aura disparue. Si maintenant , après avoir écrit cette nouvelle équation, nous entrons le résultat dans un tableau celui-ci sera un tableau à 4 variables, les deux lignes codées TU = 00 et 01 seront regroupées en une seule codée T=0 du fait de la disparition de U, de même pour les deux autres lignes codées TU = 11 et 10 qui deviennent T = 1

Tableau résultant de la simplification:

| XYZ → <br> T ↓ | 000 | 001 | 1 <br> 011 | 010 | 2 <br> 110 | 111 | 3 <br> 101 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

On voit maintenant que nous sommes devant un véritable dilemme entre les 4 variables X,Y,Z,T (damier parfait, case 0000 à 0)

$$S = X \oplus Y \oplus Z \oplus T$$

## Opérations entre tableaux de Karnaugh

Faire une opération logique entre deux fonctions, c'est faire cette opération case à case entre les tableaux de karnaugh des deux fonctions exprimées dans le même système de variables.

## ET logique entre tableaux de Karnaugh

Soit la fonction $S = X \cdot (X \oplus Y \oplus Z \oplus T)$

Ceci peut être interprété comme un ET logique entre $S1 = X$ et $S2 = X \oplus Y \oplus Z \oplus T$

**S1 = X** **ET** **S2 = X ⊕ Y ⊕ Z ⊕ T** **=** **S = X .(X ⊕ Y ⊕ Z ⊕ T)**

**S1 = X**

| XY → / ZT ↓ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 01 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 11 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 1 |

**ET** **S2 = X ⊕ Y ⊕ Z ⊕ T**

| XY → / ZT ↓ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 01 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 |

**=** **S = X .(X ⊕ Y ⊕ Z ⊕ T)**

| XY → / ZT ↓ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 01 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 0 |

La représentation de S1=X dans un tableau de Karnaugh à 4 variables place 8 "1" dans les deux colonnes de droite de notre tableau. En faisant un ET case à case de ce tableau avec le dilemme nous voyons que le dilemme se conserve dans les deux colonnes de droite et que les autres sont mises à 0.

## OU logique entre tableaux de Karnaugh

Soit la fonction $S = X.T + (\overline{Y \oplus Z})$

**S1 = X.T**

| XY → / ZT ↓ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 01 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 11 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**OU** **S2 =** $(\overline{Y \oplus Z})$

| XY → / ZT ↓ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 01 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 11 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 1 | 1 | 0 |

**=** **S =X.T +** $(\overline{Y \oplus Z})$

| XY → / ZT ↓ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 01 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 11 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Dans le cas du OU "inclusif", ce sont les 1 qui s'imposent. Dans le tableau résultat on retrouve les 1 des deux tableaux.

**OU Exclusif entre tableaux de Karnaugh**

Soit la fonction $S = Y.T \oplus (\overline{X \oplus Z})$

**S1 = Y.T** ⊕ **S2 = $(\overline{X \oplus Z})$** = **S =Y.T ⊕ $(\overline{X \oplus Z})$**

S1 = Y.T

| ZT ↓ \ XY → | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 01 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

S2 = $(\overline{X \oplus Z})$

| ZT ↓ \ XY → | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 01 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 1 |

S =Y.T ⊕ $(\overline{X \oplus Z})$

| ZT ↓ \ XY → | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 01 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Les "1" du premier tableau ont pour effet d'inverser les zones correspondantes du second tableau les 1 deviennent des 0, les 0 des 1.

Pour le logicien en exercice, il est bon de voir rapidement le tableau d'une fonction et surtout d'exprimer de façon simple son équation. Si le lecteur le souhaite , il pourra mettre en équation de façon classique le tableau résultant de ce dernier exemple, il trouvera un résultat assez complexe dont il lui sera difficile d'évaluer les fonctionnalités.

Moins l'expression est compliquée à écrire plus la probabilité d'erreur de transcription est faible. Plus la fonctionnalité est apparente, plus le test du circuit obtenu sera aisé. Ce sont ces deux paramètres qui guide le concepteur dans la recherche d'une expression simple.

**Exercices**

**Le OU Exclusif**

Montrez que les tableaux ci dessous représentent des OU exclusifs

| TU ↓ \ XYZ → | 000 | 001 | 1<br>011 | 010 | 2<br>110 | 111 | 3<br>101 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 01 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

| XYZ → / TU ↓ | 000 | 001 | 1 011 | 010 | 2 110 | 111 | 3 101 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 01 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

**Opérations entre tableaux de Karnaugh**

A l'aide des techniques décrites précédemment, mettre en équation les tableaux ci-dessous:

a/

| AB → / CD ↓ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 01 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

b/

| AB → / CD ↓ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 01 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 1 | 1 | 1 |